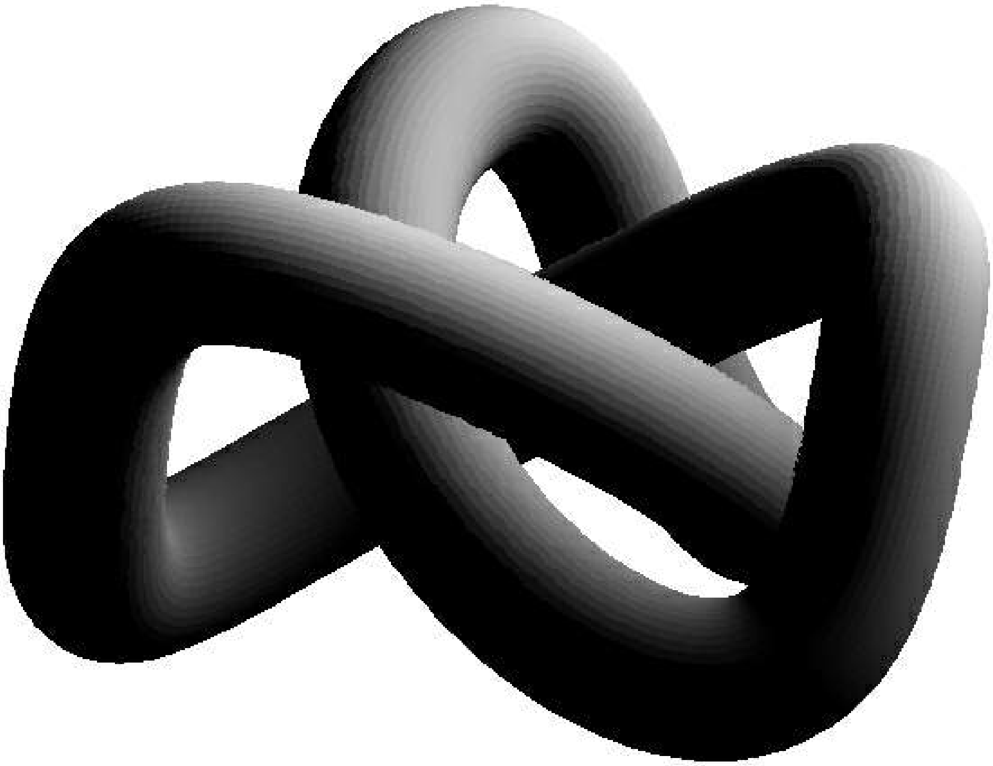
Höhere Mathematik



Formelsammlung

Bodo K. Müller

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Abbildungen und Tabellen

Abbildungen

Tabellen

Titelgrafik erstellt mit Maple V Release 4 von Waterloo Maple Inc.

Funktion: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -10 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \cos(5t) + 15 \cdot \sin(2t) \\ 10 \cdot \sin(t) - 2 \cdot \sin(5t) - 15 \cdot \sin(2t) \\ 10 \cdot \cos(3t) \end{pmatrix}$

So kann also die Mathematik definiert werden
als diejenige Wissenschaft, in der wir niemals das kennen,
worüber wir sprechen, und niemals wissen, ob das,
was wir sagen, wahr ist. **Bertrand Russell**

kontakt@bodokarlmueller.de

1. Zahlbereiche und ihre Eigenschaften

1.1 Natürliche Zahlen:

Symbol: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,...\}$

1.2 Ganze Zahlen:

Symbol: $\mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$

1.3 Rationale Zahlen:

Symbol: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p,q \in \lesseqgtr \text{ und } q \neq 0 \right\}$

1.4 Reelle Zahlen:

Symbol: $\mathbb{R}$

1.4.1 Axiome der Addition:

1.4.1.1 $a + b = b + a$

1.4.1.2 $(a + b) + c = a + (b + c)$

1.4.1.3 Die Gleichung $a + x = b$ ist <u>immer eindeutig lösbar</u>.

1.4.1.4 $-(-a) = a$

1.4.2 Axiome der Multiplikation:

1.4.2.1 $a \times b = b \times a$

1.4.2.2 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

1.4.2.3 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

1.4.2.4 Die Gleichung $a \times x = b$ ist für alle $a \neq 0$ eindeutig lösbar.

1.4.3 Axiome der Ordnung:

1.4.3.1 $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$

1.4.3.2 $a < b$; c beliebig $\Rightarrow a + c < b + c$

1.4.3.3 $a < b$; $c > 0 \Rightarrow a \times c < b \times c$

1.4.4 Archimedisches Axiom:

Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n, für die gilt: $n > |x|$

Zu jeder reellen Zahl $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n, für die gilt: $n^{-1} < x$

1.4.5 Axiom der Vollständigkeit:

Jede Verknüpfung zweier reeller Zahlen gemäß dieser Axiome ergibt wieder eine reelle Zahl.

1.4.6 Bemerkung:

Dreiecksungleichung: $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

1.5 Komplexe Zahlen:

Symbol: $\mathbb{C} = \{ z | z = (x, y) \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \}$

Die Menge der komplexen Zahlen ist ein algebraischer Körper bezüglich Addition und Multiplikation.

Imaginäre Einheit: $i^2 = -1$

1.5.1 Schreibweisen:

Schreibweise einer komplexen Zahl z:

$$z = x + i \cdot y$$

$$\text{Mit } r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ und } j = \arctan \frac{y}{x} \text{ wird daraus:}$$

$$\begin{aligned} z &= r \cdot [\cos(j) + i \cdot \sin(j)] \\ &= r \cdot cis(j) \\ &= r \cdot e^{i \cdot j} \end{aligned}$$

Es gilt die Dreiecksungleichung.

1.5.2 Die Moivre'sche Formel:

$$\begin{aligned} z^n &= [r \cdot cis(j)]^n \\ &= r^n \cdot cis(n \cdot j) \\ &= r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot j} \end{aligned}$$

Die Exponentialschreibweise von z wird als **Polarform von z** bezeichnet.

1.6 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Es sei n_0 eine natürliche Zahl und A(n) für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ eine Aussage. Es gelte:

1.6.1 Induktionsanfang:

A(n_0) ist eine wahre Aussage.

1.6.2 Induktionsvoraussetzung:

Die Annahme der Gültigkeit dieser Aussage für alle $n \geq n_0$

1.6.3 Induktionsschluß:

[A(n) $\Rightarrow$ A(n+1)] ist wahr für alle $n \geq n_0$

Damit ist die Gültigkeit der Aussage A(n) bewiesen.

1.6.4 Beispiel: Bernoullische Ungleichung:

Es sei x eine reelle Zahl mit $-1 \leq x$. Ferner sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt für alle n die Bernoullische Ungleichung: $A(n)\colon 1 + n \cdot x \leq (1+x)^n$

Beweis unter Verwendung vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $n_0 = 1\colon 1 + x \leq (1+x)^1 = 1 + x$ (gilt insbesondere für $-1 \leq x$)

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{Z}$, also $1 + n \cdot x \leq (1+x)^n$.

Induktionsschluß: Zu zeigen ist, daß die Behauptung dann auch für $n + 1$ gilt, also $1+(n+1)\cdot x \le (1+x)^{n+1}$. Außerdem gilt: Da $-1 \le x$ ist, ist $1+x \ge 0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x)\\ &\ge (1+n\cdot x)\cdot(1+x)\\ &= 1+(n+1)\cdot x + n\cdot x^2\\ &\ge 1+(n+1)\cdot x\end{aligned}$$

Damit ist die Gültigkeit der Bernoullischen Ungleichung bewiesen.

1.7 Fakultät, Binomialkoeffizient, Binomischer Lehrsatz

1.7.1 Die Fakultät:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

1.7.2 Der Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} & \text{wenn } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{wenn k > n} \end{cases}$$

1.7.3 Der Binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \qquad \text{(siehe Pascalsches Dreieck)}$$

Der binomische Lehrsatz kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

1.7.4 Pascal’sches Dreieck:

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
n=0	1						
n=1	1	1					
n=2	1	2	1				
n=3	1	3	3	1			
n=4	1	4	6	4	1		
n=5	1	5	10	10	5	1	
n=6	1	6	15	20	15	6	1

$$= \binom{n}{k}$$

Abbildung 1: Pascal'sches Dreieck

1.8 Der Fundamentalsatz der Algebra

Ein Polynom n-ten Grades kann immer folgendermaßen umgeformt werden:

$$P(z) = a_0 + a_1 \cdot z + \ldots + a_n \cdot z^n$$
$$= a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

Mit $a_n \neq 0 \wedge a_i \in \mathbb{C}$

Die Zahlen z_i heißen **Nullstellen des Polynoms P**.
Jedes Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle.

2. Vektorrechnung, analytische Geometrie, lineare Gleichungssysteme

2.1 Vektorrechnung, analytische Geometrie

2.1.1 Vektorielle Addition:

$$\underline{a}+\underline{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

2.1.2 Skalarprodukt:

$$\underline{a}\cdot\underline{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_n\cdot b_n=\sum_{j=1}^{n}a_j\cdot b_j\in\mathbb{R}$$

Zusätzlich gilt: $\underline{a}\cdot\underline{b}=0 \;\Leftrightarrow\; \underline{a}\perp\underline{b}$

2.1.3 Länge des Vektors $\underline{a}$:

$$\|\underline{a}\|=\sqrt{\underline{a}\cdot\underline{a}}=\sqrt{\underline{a}^2}$$

2.1.4 Schwarzsche Ungleichung:

$$|\underline{a}\cdot\underline{b}|\leq\|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|$$

Ferner gilt die Dreiecksungleichung

2.1.5 Orthogonale Projektion von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$:

$$\mathrm{Proj}_{\underline{b}}\,\underline{a}=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\|\underline{b}\|^2}\cdot\underline{b}=\lambda\cdot\underline{b}$$

2.1.6 Winkel zwischen zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$:

$$\cos\alpha=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|}$$

2.1.7 Raumprodukt (Spatprodukt):

$$\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle=(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}$$

Es erzeugt es ein ***Rechtssystem***, falls es positiv ist, und ein ***Linkssystem***, falls es negativ ist. Das Vektortripel heißt ***ausgeartet (linear abhängig)***, falls das Spatprodukt null ist.

2.1.8 Vektorprodukt (Kreuzprodukt):

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Ist das Kreuzprodukt null, so sind die beiden Vektoren ***linear abhängig***.

2.1.9 Vektorielle Darstellung einer Gerade in Punkt-Richtungsform:

$$g\colon\ \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \underline{a}$$

2.1.10 Vektorielle Darstellung einer Gerade in Hesseform:

$$g\colon\ \vec{x} \cdot \underline{\eta} = d$$

2.1.11 Vektorielle Darstellung einer Gerade in Hesse-Normalenform:

$$g\colon\ \frac{1}{\|\underline{\eta}\|} \cdot \vec{x} \cdot \underline{\eta} = \frac{d}{\|\underline{\eta}\|}$$

Die Darstellungsarten in Hesseform sind nur im zweidimensionalen Vektorraum möglich, im dreidimensionalen Raum repräsentieren sie Ebenen.

2.1.12 Plückerform einer Gerade im dreidimensionalen Vektorraum:

$$g : \vec{x} \times \underline{a} = \underline{m}$$

2.1.13 Darstellung einer Ebene in Punkt-Richtungsform:

$$E : \vec{x} = \vec{p} + l \cdot \underline{a}_1 + m \cdot \underline{a}_2$$

2.1.14 Darstellung einer Ebene in Hesseform:

$$E : \cdot\ \vec{x} \cdot \underline{h} = d$$

2.1.15 Darstellung einer Ebene in Hesse-Normalenform:

$$E\colon\ \frac{1}{\|\underline{\eta}\|} \cdot \vec{x} \cdot \underline{\eta} = \frac{d}{\|\underline{\eta}\|}$$

2.1.16 Umrechnungsformeln der Ebenenformen:

$$\underline{\eta} = \underline{a}_1 \times \underline{a}_2$$
$$d = \vec{p} \cdot \underline{h} = \vec{p} \cdot \left(\underline{a}_1 \times \underline{a}_2\right)$$

2.1.17 Identität von Lagrange:

$$\left(\underline{a} \times \underline{b}\right) \cdot \left(\underline{c} \times \underline{d}\right) = \left(\underline{a} \cdot \underline{c}\right) \cdot \left(\underline{b} \cdot \underline{d}\right) - \left(\underline{a} \cdot \underline{d}\right) \cdot \left(\underline{b} \cdot \underline{c}\right)$$

2.2 Lineare Gleichungssysteme

Eine Linearkombination aus n Vektoren des Grades n bildet ein lineares Gleichungssystem, wenn ein bestimmter Vektor als Ergebnis der Linearkombination gefordert wird. Ist dieser Vektor der Nullvektor, so spricht man von einem ***homogenen Gleichungssystem***, andernfalls von einem ***inhomogenen Gleichungssystem***.

$$x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + x_3 \cdot \underline{a}_3 + \ldots + x_n \cdot \underline{a}_n = \underline{b}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \underline{a}_j = \underline{b}$$

Ein LGS ist **lösbar**, falls genügend linear unabhängige Gleichungen vorhanden sind. Sind bei einem LGS vom **Rang *n*** (d.h. mit n Unbekannten) nur r linear unabhängige Gleichungen gegeben, so beträgt der **Defekt *d*** des Gleichungssystems: $d = n - r$.

2.2.1 Allgemeines Lösungsverfahren:

Zunächst wird die Hauptdeterminante D berechnet, was bis Rang $n = 3$ ohne weitere Umformungen möglich ist. Ist der Rang $n > 3$, ist meistens der Gauß'sche Algorithmus am günstigsten.

1. Fall: $D = 0$: keine eindeutige Lösung $\Rightarrow$ Gauß'scher Algorithmus (Lösungsmenge ist eine Ebene oder eine Gerade)
2. Fall: $D \neq 0$: eindeutige Lösung $\Rightarrow$ Cramer'sche Regel (Determinantenverfahren)

Zum Schluß wird die Lösungsmenge als Vektor oder Zahlentupel aufgeschrieben.

2.2.2 Der Gauß'sche Algorithmus:

Das Prinzip besteht darin, eine Gleichung dazu zu benutzen, aus den restlichen eine Unbekannte zu eliminieren. Dies wird dann so lange fortgesetzt, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten vorhanden ist. Danach wird rückwärts in alle Gleichungen eingesetzt, womit man alle Unbekannten erhält und das LGS löst.

Die folgenden zwei Beispiele zeigen ein eindeutig lösbares und ein nicht eindeutig lösbares LGS.

<u>1. Beispiel</u>:
Folgendes LGS ist gegeben. Gesucht ist dessen Lösungsmenge.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Durch rückwärtiges Lösen der Gleichungen XVI bis XIII erhält man:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = -1$$

Die Probe durch Einsetzen bestätigt dieses Ergebnis.

	x_1	x_2	x_3	x_4		Operation
I	1	2	3	4	-2	
II	2	3	4	1	2	
III	3	4	1	2	2	
IV	4	1	2	3	-2	
V	1	2	3	4	-2	
VI	0	-1	-2	-7	6	=II-2I
VII	0	-2	-8	-10	8	=III-3I
VIII	0	-7	-10	-13	6	=IV-4I
IX	1	2	3	4	-2	
X	0	-1	-2	-7	6	
XI	0	0	-4	4	-4	=VII-2VI
XII	0	0	4	36	-36	=VIII-7VI
XIII	1	2	3	4	-2	
XIV	0	-1	-2	-7	6	
XV	0	0	-4	4	-4	
XVI	0	0	0	40	-40	=XI+XII

<u>2. Beispiel</u>:

Folgendes LGS ist gegeben. Es enthält mehr Gleichungen als Unbekannte.

$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 - 12x_3 &= -5 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 5x_2 + 17x_3 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Eine Lösung existiert, sie ist aber nicht eindeutig. Es kann eine Unbekannte als Parameter wählen, z.B. x_3.

Die Lösung lautet dann:

$$t \in (-\infty; \infty)$$
$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{9}{5}t$$
$$x_2 = \frac{7}{5} - \frac{17}{5}t$$
$$x_3 = t$$

	x_1	x_2	x_3		Operation
I	-1	-3	-12	-5	
II	-1	2	5	2	
III	0	5	17	7	
IV	3	-1	2	1	
V	7	-4	-1	0	
VI	-1	-3	-12	-5	
VII	0	-5	-17	-7	=I-II
VIII	0	5	17	7	=III
IX	0	-10	-34	-14	=3I+IV
X	0	-25	-85	-35	=7I+V
XI	-1	-3	-12	-5	
XII	0	-5	-17	-7	
XIII	0	0	0	0	
XIV	0	0	0	0	
XV	0	0	0	0	

Die geometrische Deutung der Lösungsmenge eines LGS mit drei Unbekannten ist die Bestimmung der Schnittmenge der durch die drei Gleichungen des LGS gegebenen Ebenen. In diesem Beispiel ist die Lösungsmenge eine Gerade:

$$g: \vec{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}t\begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Die Cramer'sche Regel:

Ist die Determinante der Koeffizientenmatrix eines LGS nicht null, dann lassen sich die Unbekannten x_k sofort berechnen. Man berechnet dabei zur Bestimmung z.B. der Unbekannten x_3 Die Determinante D_3, die sich durch Vertauschen des 3.Spaltenvektors der Koeffizientendeterminan-te mit dem Vektor der absoluten Glieder ergibt. Aus diesen beiden Determinanten berechnet sich die Unbekannte x_3 als deren Quotient.

Allgemein: $x_n = \frac{D_n}{D}$

Die mit der Cramer'schen Regel berechneten Lösungen sind immer eindeutig.

3. Matrizen, Matrixalgebra

3.1 Beispiele für (m,n)-Matrizen

3.1.1 (*n,n*)-Einheitsmatrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.2 (*m,n*)-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Der erste Index bei den Einträgen a_{ij} heißt ***Zeilenindex*** und gibt die Zeile an, in der der Eintrag steht, der zweite ist der ***Spaltenindex*** und gibt die Spalte der Matrix an, in der der Eintrag steht.

3.2 Rechnen mit Matrizen

3.2.1 Addition zweier (*m,n*)-Matrizen *A* und *B*, Multiplikation mit einer Konstanten *k*:

Alle Einträge werden einzeln addiert, d.h. $C = A + B$ bzw. $c_{\text{ij}} = a_{\text{ij}} + b_{\text{ij}}$

Alle Einträge werden einzeln mit *k* multipliziert. $C = kB$ bzw. $c_{\text{ij}} = kb_{\text{ij}}$

3.2.2 Transponieren einer (*m,n*)-Matrix *A*:

Es entsteht eine ***(n,m)-Matrix A^T***, für deren Einträge $a_{\text{ji}A^T}$ gilt: $a_{\text{ji}A^T} = a_{\text{ij}A}$

3.2.2.1 Zusatzeigenschaften bei (*n,n*)-Matrizen:

Eine (*n,n*)-Matrix *A* heißt ***symmetrisch***, wenn gilt: $A^T = A$

Eine (*n,n*)-Matrix *A* heißt ***antisymmetrisch***, wenn gilt: $A^T = -A$

<u>Beispiel</u>: Gegeben sind die Matrizen *A* und *B*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -7+2 \\ 3+2 & 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot B = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 0 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 2 & 5\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = B$$

3.2.3 Verkettung von Matrizen, Matrixmultiplikation:

Generell ist dies nur möglich, wenn die erste Matrix (m,n) diesselbe Anzahl von Spalten hat wie die zweite Matrix (p,q) Zeilen, d.h. wenn $\boldsymbol{n = p}$.

Es entsteht eine (m,q)-Matrix.

Deren Einträge lauten dann allgemein: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Beispiel: Gegeben seien die beiden Matrizen A und B: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Wird A mit B verkettet, so entsteht eine (2,2)-Matrix: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Umgekehrt entsteht eine (3,3)-Matrix: $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Daraus folgt: ***Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ.***

Aber: *Multiplikation von (n,n)-Matrizen ist assoziativ, es gilt auch das Distributivgesetz.*

3.2.3.1 Dyadisches Produkt:

So heißt das Produkt einer (n,1)-Matrix mit einer (1,n)-Matrix. Es ensteht eine (n,n)-Matrix.

3.2.4 Matrixinversion quadratischer Matrizen:

Es gilt für die zu A inverse Matrix A^{-1}: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

Bedingung für Invertierbarkeit: $\det(A) \neq 0$

3.2.5 Rang einer Matrix:

Unter dem Rang $r(A)$ der (m,n)-Matrix A versteht man Folgendes: Die Maximalanzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (Spaltenvektoren) heißt Zeilenrang (Spaltenrang) der Matrix A. *Zeilenregulär* ist die Matrix A, wenn $r(A) = m$, *spaltenregulär*, wenn $r(A) = n$.

Eine (n,n)-Matrix heißt *regulär*, wenn $r(A) = n$ und *singulär*, wenn $r(A) < n$.

Die Existenz der Inversen A^{-1} und die Regularität von A sind *äquivalent*.

Zur Berechnung des Ranges einer (m,n)-Matrix werden die größtmöglichen Unterdeterminanten gebildet. Ist eine von ihnen nicht null, so ist der Rang gleich der Ordnung (Anzahl der Spaltenvektoren) dieser Unterdeterminante. Gegebenenfalls muß die Ordnung der Unterdeterminante verringert werden, bis eine von ihnen ungleich null ist.

3.2.6 Lösung einfacher Matrixgleichungen:

Die Gleichung $A \cdot X = B$ hat die Lösung $X = B \cdot A^{-1}$.

Dies setzt die Existens der inversen Matrix A^{-1} voraus.

3.2.7 Rechenregeln für Determinanten:

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ (Produktregel)

$\det(A^T) = \det(A)$

$\det(E_n) = 1$

$\det(c \cdot A) = c^n \cdot \det(A)$ für (n,n)-Matrizen

3.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Gegeben sei eine lineare Abbildung $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$

Unter den **Eigenwerten** l und den **Eigenvektoren** $\underline{n}$ der Matrix A versteht man alle diejenigen Konstanten bzw. Vektoren, für die gilt:

$$A \cdot \underline{\nu} = \lambda \cdot \underline{\nu}$$

Aus dieser Definition folgt:

$$A \cdot \underline{n} = l \cdot \underline{n} \Leftrightarrow (A - l \cdot E)\underline{n} = \underline{0}$$

$$\text{für}\, \underline{n} \neq \underline{0}\, (\text{Nullvektor})\, \text{folgt sofort:}$$

$$\det(A - l \cdot E) = 0$$

In Determinantenschreibweise:

$$\det(A - l \cdot E) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - l & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - l & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - l & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - l \end{pmatrix} = 0$$

<u>Beispiel</u>: Gesucht sind alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - l \cdot E) = \begin{vmatrix} 2 - l & -3 & 1 \\ 3 & 1 - l & 3 \\ -5 & 2 & -4 - l \end{vmatrix} = -l^3 - l^2 + 2l = 0$$

$$\Leftrightarrow l_1 = 0;\; l_2 = 1;\; l_3 = -2$$

Die einzelnen Eigenwerte werden in das jeweilige (überbestimmte) homogene Gleichungssystem eingesetzt und dessen Lösungsmenge nach bekannten Verfahren bestimmt. Diese ist dann der zum einzelnen Eigenwert gehörende Eigenvektor. In der Regel werden die Eigenvektoren auf den Betrag 1 normiert.

Ein Spezialfall ergibt sich, wenn außer der Hauptdiagonalen der Matrix nur Nullen in ihr stehen. Die Zahlen in der Hauptdiagonalen sind dann zugleich die Eigenwerte der Matrix.

$$B = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_n \end{pmatrix}$$

4. Folgen und Reihen

4.1 Folgen

4.1.1 Teilfolge:
Unter einer Teilfolge versteht man eine Folge, die durch Wegstreichen von bestimmten Gliedern aus einer anderen Folge, aber ohne Veränderung der Reihenfolge, aus jener Folge entsteht.

4.1.2 Konvergenz:
Eine Folge oder Reihe konvergiert, wenn die Differenz zwischen einem Folgenglied (bzw. die Folge der Partialsummen der Reihe) und dem zugehörigen Grenzwert jeden beliebigen reellen Wert unterschreiten kann:

$$\left|a_k - a\right| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = a$$

4.1.3 Divergenz:
Eine nicht konvergente Folge (oder Reihe) heißt divergent. Sie heißt *bestimmt divergent*, wenn gilt:

$$\lim_{k\to\infty}\left|a_k\right| = \infty$$

4.1.4 Beschränkte Folgen:
Eine Folge heißt beschränkt, wenn es eine positive reelle Zahl gibt, die gegenüber dem einzelnen Absolutbetrag jedes einzelnen Folgengliedes immer größer (oder gleich) ist. Sie ist nach ***unten beschränkt***, wenn der Absolutbetrag $|a| = -a$ ist und nach ***oben beschränkt***, wenn $|a| = a$ ist. Eine Vektorfolge heißt beschränkt, wenn der Betrag der Folgenvektoren beschränkt ist. Dies wiederum ist der Fall, wenn jede Kompnentenfolge beschränkt ist.

4.1.5 Monotonie:
Wenn alle $k \in \mathbb{N}$ sind, kann für Folgen formuliert werden:

Monoton wachsend: $a_{k+1} \geq a_k$

Streng monoton wachsend: $a_{k+1} > a_k$

Monoton fallend: $a_{k+1} \leq a_k$

Streng monoton fallend: $a_{k+1} < a_k$

4.1.6 Eulersche Zahl:
Die Eulersche Zahl e ist der Grenzwert einer Folge:

$$e = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \approx 2{,}71828...$$

4.1.7 Konvergenzkriterium von Cauchy:
<u>Satz und Definition</u>*:* Eine reelle oder komplexe Folge bzw. Vektorfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d.h. es gibt zum $e > 0$ eine Zahl $N(e)$, für die existiert

$$\left|a_n - a_m\right| \leq e \qquad n, m \geq N(e)$$

4.1.8 Rekursiv definierte Folgen:

Die Folgenglieder werden mit Hilfe des vorherigen bestimmt, z.B.:

$$a_1 = 1 \ , \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + \frac{1}{a_n}} \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

4.1.9 Regeln bei Grenzwertbestimmungen:

Seien gegeben : $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a \qquad \lim\limits_{k\to\infty} b_k = b \qquad \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty \qquad \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \infty$

Daraus folgt : $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k + b_k) = a + b$

$$\lim_{k\to\infty}(a_k + b_k) = \infty$$

$$\lim_{k\to\infty}(b_k + b_k) = \infty$$

$$\lim_{k\to\infty}(c \cdot b_k) = c \cdot \lim_{k\to\infty}(b_k) = c \cdot b$$

$$\lim_{k\to\infty}(c \cdot b_k) = c \cdot \lim_{k\to\infty}(b_k) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } c > 0 \\ -\infty & \text{wenn } c < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty}(a_k \cdot b_k) = a \cdot b$$

$$\lim_{k\to\infty}(a_k \cdot b_k) = \infty$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{a}{b} \quad \text{wenn } b_k \neq 0 \ \forall\, k \in [1, \infty)$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = 0 \quad \text{wenn } b_k \neq 0 \ \forall\, k \in [1, \infty)$$

4.1.10 Alternierende Folgen:

Folgen, die mit jedem Folgenglied zwischen positiven und negativen Werten schwanken, heißen alternierende Folgen.

Beispiel: $a_k = (-1)^{k-5}$

4.2 Unendliche Reihen

Wird einer unendlichen Folge von Zahlen eine Summe zugeordnet, die als Summanden die Folgenglieder haben, so heißt diese Summe ***unendliche Reihe***. Werden nur die Folgenglieder bis zur Stelle k addiert, so spricht man von der ***k-ten Partialsumme*** der Reihe. Die Konvergenz, Divergenz und Monotonie wird definiert wie bei Folgen.

4.2.1 Cauchy-Kriterium für Reihen:

Es besagt analog zum Cauchy-Kriterium für Folgen, daß es zu jeder Differenz zweier Partialsummen m und n, welche kleiner als ein $e > 0$ ist, ein $N(e)$ gibt, für das gilt: $m \geq n \geq N(e)$. Allgemein muß gelten, daß die Folge der Partialsummen konvergiert.

Beispiel: Die ***harmonische Reihe*** $\sum \frac{1}{k}$ ***ist divergent***.

Erfüllt eine Reihe das Cauchy-Kriterium, so gilt: $\sum a_k$ konvergent $\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

4.2.2 Majoranten- und Minorantenkriterium:

Mit der Reihe $\sum a_k, \quad a_k \in \mathbb{C}$, läßt sich sagen:

4.2.2.1 Die konvergente Reihe $\sum b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}_+$ heißt ***Majorantenreihe*** von $\sum a_k$, wenn ab einer bestimmten Stelle N_0 das Reihenglied b_k ständig größer ist als $|a_k|$. Dann ist die Reihe $\sum a_k$ absolut konvergent.

4.2.2.2 Die divergente Reihe $\sum c_k, \quad c_k \in \mathbb{R}_+$ heißt ***Minorantenreihe*** von $\sum \left|a_k\right|$, wenn ab einer bestimmten Stelle N_0 das Reihenglied c_k ständig kleiner ist als $|a_k|$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_k\right|$ divergent (die Reihe $\sum a_k$ nicht <u>absolut</u> konvergent).

4.2.3 Die geometrische Reihe:

Allgemein lautet sie: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad q \in \mathbb{C}$

Bedingung für Konvergenz: $|q| < 1$: $\quad \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} q^k = \frac{1}{1-q}$

Bedingung für Divergenz: $|q| \geq 1$: $\quad \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} q^k = \infty$

4.2.4 Das Quotientenkriterium:

Es sei $\sum a_k, \quad a_k \in \mathbb{C}$ eine beliebige Reihe. Es gilt für diese Reihe:

Für $g = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ gilt:

$g < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konvergiert absolut

$g > 1 \Rightarrow \sum a_k$ divergiert

$g = 1 \Rightarrow$ keine Aussage über das Konvergenzverhalten möglich

4.2.5 Wurzelkriterium:

Die Reihe $\sum a_k, \quad a_k \in \mathbb{C}$ ist gegeben.

Für $g = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ gilt:

$g < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konvergiert absolut

$g > 1 \Rightarrow \sum a_k$ divergiert

$g = 1 \Rightarrow$ keine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten möglich

4.2.6 Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen:
Ist die Folge der Reihenglieder monoton fallend und deren Grenzwert null, so ist die Reihe konvergent.

4.2.7 Cauchy-Produkt, Satz von Mertens:
Das *Cauchy-Produkt* zweier Reihen wird definiert als:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit} \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Satz von Mertens: Konvergiert eine Reihe gegen *A* und eine andere gegen *B*, so konvergiert ihr Cauchy-Produkt gegen *AB*.

5. Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit

5.0.1 *n*-dimensionale Funktionen:

Eine Funktion mit n reellwertigen Veränderlichen erzeugt einen Graphen der Dimension $n+1$.

5.0.2 Darstellung einer *n*-dimensionalen Funktion:

$$f : z \mapsto f(z) \qquad z \in A \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$G_f = \left\{ f(z) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| z = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) \right\}$$

5.1 Grenzwerte

5.1.1 Übertragungsprinzip für Grenzwerte von Funktionen:

Der Limes einer Funktion $f(\underline{x})$ an der Stelle $\underline{x}_0$ lautet analog zum Grenzwert von Folgen und Reihen:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{a}$$
$$\Leftrightarrow \text{für ein } e > 0 \text{ existiert ein } d(e, \underline{x}_0) \text{, für das gilt :}$$
$$\left\| f(\underline{x}) - \underline{a} \right\| \leq e \quad \text{falls} \quad \left\| \underline{x} - \underline{x}_0 \right\| \leq d(e, \underline{x}_0)$$

5.1.2 Linksseitiger Grenzwert, rechtsseitiger Grenzwert:

Man unterscheidet die Grenzwerte, die ermittelt werden, wenn man sich von links oder von rechts an die Stelle $\underline{x}_0$ nähert, denn bei vielen Funktionen sind sie an bestimmten Stellen unterschiedlich.

5.1.3 Uneigentlicher Grenzwert:

Als uneigentlichen Grenzwert bezeichnet man den Grenzwert $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \pm\infty$.

5.1.4 Stetigkeit von Funktionen:

Eine Funktion heißt stetig in $\underline{x}_0$, wenn ihr rechts- und linksseitiger Grenzwert (und gegebenenfalls der Funktionswert) bei $\underline{x}_0$ gleich sind.

5.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

5.2.1 Extremwertsatz von Weierstraß:

Gilt für ein gegebenes Intervall $[a,b]$ für ein x aus diesem Intervall

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$
$$f(x_2) = \sup\left\{ f(x) \middle| x \in [a,b] \right\}$$
$$f(x_1) = \inf\left\{ f(x) \middle| x \in [a,b] \right\}$$

so, heißt x_1 **Minimum von *f* auf [*a*,*b*]** und x_2 **Maximum von *f* auf [*a*,*b*]**.

5.2.2 Monotonie stetiger Funktionen:

Die Monotoniebegriffe werden ebenso definiert wie für Folgen und Reihen.

6. Differentialrechnung

6.0.1 Tangente:

Die Tangente einer Funktion *f* an der Stelle *x* ist eine Gerade, die die Funktion *f* an der Stelle *x* berührt bzw. unter dem Winkel α = 0 schneidet.

6.0.2 Limes des Differenzenquotienten, Ableitung der Funktion *f* an der Stelle *x*:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = Df(x_0)$$

6.0.3 Differenzierbarkeit:

Die Differenzierbarkeit kann eingeschränkt sein (s. Stetigkeit). Man unterscheidet deshalb linksseitige und rechtsseitige Differenzierbarkeit.

6.1 Ableitungsregeln

6.1.1 Faktorsatz:

$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

6.1.2 Summenregel:

$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

6.1.3 Produktregel:

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

6.1.4 Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

6.1.5 Kettenregel:

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Ist die Ableitung an der Stelle *x* positiv, so ist die Funktion dort monoton steigend, ist die Ableitung negativ, so ist sie dort monoton fallend. Ist sie null, so liegt ein **Extrempunkt oder Terrassenpunkt** vor.

6.2 Ableitungen von reellwertigen Funktionen mehrerer Veränderlicher und von vektorwertigen Funktionen

6.2.1 Vektorwertige Funktionen und deren Ableitung:

$$\text{Funktion } \underline{f} : D \mapsto \mathbb{R}^m : \ \underline{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{Ableitung } \underline{f}'(x) \text{ von } \underline{f}(x): \ \underline{f}'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}$$

$\underline{f}'(x)$ ist der Richtungsvektor der Tangente an die Kurve $\underline{f}$ im Punkt $(x, \underline{f}(x))$.