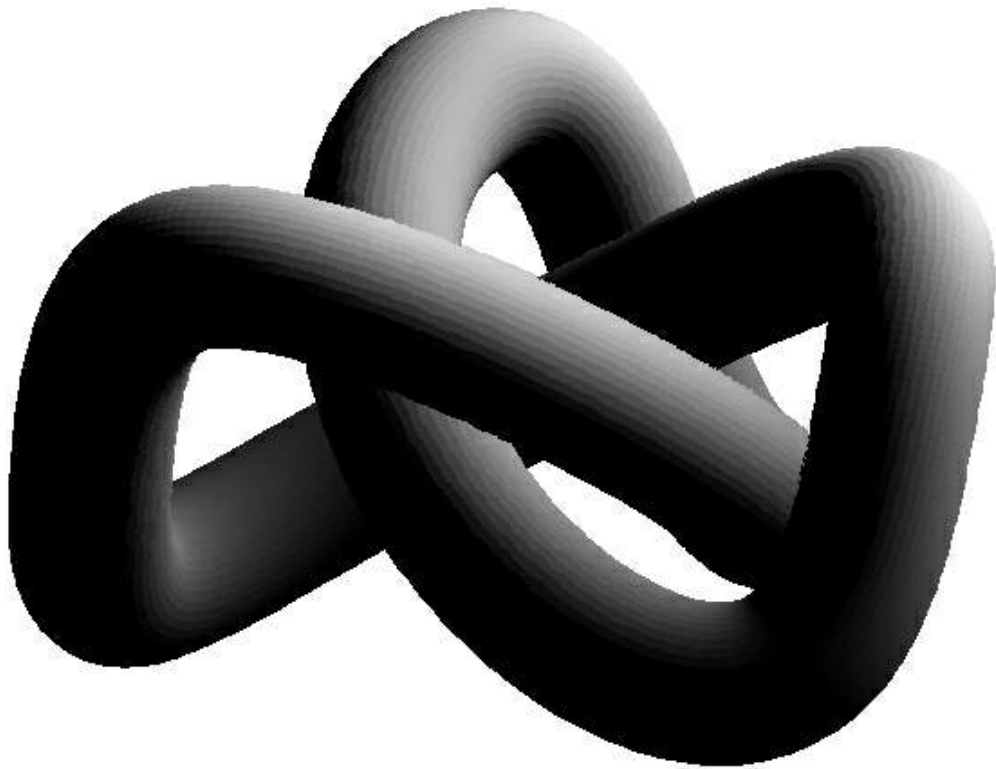


# Höhere Mathematik



Formelsammlung

Bodo K. Müller

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Zahlbereiche und ihre Eigenschaften .....</b>	<b>13</b>
<b>1.1 Natürliche Zahlen: .....</b>	<b>13</b>
<b>1.2 Ganze Zahlen:.....</b>	<b>13</b>
<b>1.3 Rationale Zahlen: .....</b>	<b>13</b>
<b>1.4 Reelle Zahlen: .....</b>	<b>13</b>
1.4.1 Axiome der Addition: .....	13
1.4.2 Axiome der Multiplikation: .....	13
1.4.3 Axiome der Ordnung: .....	13
1.4.4 Archimedisches Axiom:.....	13
1.4.5 Axiom der Vollständigkeit:.....	13
1.4.6 Bemerkung:.....	13
<b>1.5 Komplexe Zahlen: .....</b>	<b>13</b>
1.5.1 Schreibweisen: .....	14
1.5.2 Die Moivre'sche Formel:.....	14
<b>1.6 Das Prinzip der vollständigen Induktion .....</b>	<b>14</b>
1.6.1 Induktionsanfang:.....	14
1.6.2 Induktionsvoraussetzung:.....	14
1.6.3 Induktionsschluß: .....	14
1.6.4 Beispiel: Bernoullische Ungleichung: .....	14
<b>1.7 Fakultät, Binomialkoeffizient, Binomischer Lehrsatz .....</b>	<b>15</b>
1.7.1 Die Fakultät:.....	15
1.7.2 Der Binomialkoeffizient: .....	15
1.7.3 Der Binomische Lehrsatz:.....	15
1.7.4 Pascal'sches Dreieck:.....	15
<b>1.8 Der Fundamentalsatz der Algebra .....</b>	<b>16</b>
<b>2. Vektorrechnung, analytische Geometrie, lineare Gleichungssysteme.....</b>	<b>17</b>
<b>2.1 Vektorrechnung, analytische Geometrie.....</b>	<b>17</b>
2.1.1 Vektorielle Addition: .....	17
2.1.2 Skalarprodukt:.....	17
2.1.3 Länge des Vektors $\underline{a}$ :.....	17
2.1.4 Schwarzsche Ungleichung: .....	17
2.1.5 Orthogonale Projektion von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$ :.....	17
2.1.6 Winkel zwischen zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ : .....	17
2.1.7 Raumprodukt (Spatprodukt): .....	17
2.1.8 Vektorprodukt (Kreuzprodukt): .....	18
2.1.9 Vektorielle Darstellung einer Gerade in Punkt-Richtungsform:.....	18
2.1.10 Vektorielle Darstellung einer Gerade in Hesseform: .....	18

2.1.11	Vektorielle Darstellung einer Gerade in Hesse-Normalenform:.....	18
2.1.12	Plückerform einer Gerade im dreidimensionalen Vektorraum:.....	18
2.1.13	Darstellung einer Ebene in Punkt-Richtungsform: .....	18
2.1.14	Darstellung einer Ebene in Hesseform: .....	18
2.1.15	Darstellung einer Ebene in Hesse-Normalenform: .....	18
2.1.16	Umrechnungsformeln der Ebenenformen:.....	18
2.1.17	Identität von Lagrange: .....	18
<b>2.2</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme .....</b>	<b>19</b>
2.2.1	Allgemeines Lösungsverfahren:.....	19
2.2.2	Der Gauß'sche Algorithmus:.....	19
2.2.3	Die Cramer'sche Regel:.....	21
<b>3.</b>	<b>Matrizen, Matrixalgebra .....</b>	<b>22</b>
<b>3.1</b>	<b>Beispiele für <math>(m,n)</math>-Matrizen .....</b>	<b>22</b>
3.1.1	$(n,n)$ -Einheitsmatrix:.....	22
3.1.2	$(m,n)$ -Matrix:.....	22
<b>3.2</b>	<b>Rechnen mit Matrizen.....</b>	<b>22</b>
3.2.1	Addition zweier $(m,n)$ -Matrizen $A$ und $B$ , Multiplikation mit einer Konstanten $k$ :.....	22
3.2.2	Transponieren einer $(m,n)$ -Matrix $A$ : .....	22
3.2.3	Verkettung von Matrizen, Matrixmultiplikation: .....	23
3.2.4	Matrixinversion quadratischer Matrizen:.....	23
3.2.5	Rang einer Matrix: .....	23
3.2.6	Lösung einfacher Matrixgleichungen: .....	23
3.2.7	Rechenregeln für Determinanten: .....	23
<b>3.3</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren .....</b>	<b>24</b>
<b>4.</b>	<b>Folgen und Reihen .....</b>	<b>25</b>
<b>4.1</b>	<b>Folgen .....</b>	<b>25</b>
4.1.1	Teilfolge:.....	25
4.1.2	Konvergenz:.....	25
4.1.3	Divergenz:.....	25
4.1.4	Beschränkte Folgen:.....	25
4.1.5	Monotonie: .....	25
4.1.6	Eulersche Zahl: .....	25
4.1.7	Konvergenzkriterium von Cauchy: .....	25
4.1.8	Rekursiv definierte Folgen:.....	26
4.1.9	Regeln bei Grenzwertbestimmungen:.....	26
4.1.10	Alternierende Folgen: .....	26
<b>4.2</b>	<b>Unendliche Reihen.....</b>	<b>26</b>
4.2.1	Cauchy-Kriterium für Reihen: .....	26
4.2.2	Majoranten- und Minorantenkriterium: .....	27
4.2.3	Die geometrische Reihe: .....	27
4.2.4	Das Quotientenkriterium:.....	27
4.2.5	Wurzelkriterium:.....	27
4.2.6	Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen: .....	28

4.2.7 Cauchy-Produkt, Satz von Mertens: .....	28
<b>5. Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit .....</b>	<b>29</b>
5.0.1 $n$ -dimensionale Funktionen:.....	29
5.0.2 Darstellung einer $n$ -dimensionalen Funktion:.....	29
<b>5.1 Grenzwerte.....</b>	<b>29</b>
5.1.1 Übertragungsprinzip für Grenzwerte von Funktionen:.....	29
5.1.2 Linksseitiger Grenzwert, rechtsseitiger Grenzwert:.....	29
5.1.3 Uneigentlicher Grenzwert:.....	29
5.1.4 Stetigkeit von Funktionen:.....	29
<b>5.2 Eigenschaften stetiger Funktionen .....</b>	<b>29</b>
5.2.1 Extremwertsatz von Weierstraß:.....	29
5.2.2 Monotonie stetiger Funktionen:.....	29
<b>6. Differentialrechnung.....</b>	<b>30</b>
6.0.1 Tangente:.....	30
6.0.2 Limes des Differenzenquotienten, Ableitung der Funktion $f$ an der Stelle $x$ :.....	30
6.0.3 Differenzierbarkeit:.....	30
<b>6.1 Ableitungsregeln.....</b>	<b>30</b>
6.1.1 Faktorsatz:.....	30
6.1.2 Summenregel:.....	30
6.1.3 Produktregel:.....	30
6.1.4 Quotientenregel:.....	30
6.1.5 Kettenregel:.....	30
<b>6.2 Ableitungen von reellwertigen Funktionen mehrerer Veränderlicher und von vektorwertigen Funktionen.....</b>	<b>30</b>
6.2.1 Vektorwertige Funktionen und deren Ableitung:.....	30
6.2.2 Partielle Ableitung einer reellwertigen Funktion $f$ :.....	31
6.2.3 Totale Ableitung bei einer Funktion $f(x,y,z)$ im $\mathbb{R}^3$ :.....	31
6.2.4 Gradient:.....	31
6.2.5 Partielle Ableitung einer vektorwertigen Funktion:.....	31
6.2.6 Ableitungsregeln für vektorwertige Funktionen:.....	32
<b>7. Potenzreihen und elementare Funktionen .....</b>	<b>33</b>
<b>7.1 Exponentialfunktion und Logarithmus .....</b>	<b>33</b>
7.1.1 (Komplexe) Exponentialfunktion:.....	33
7.1.2 Reelle Exponentialfunktion:.....	33
7.1.3 Umkehrfunktion $\ln(x)$ :.....	33
7.1.4 Reelle Exponentialfunktion zur Basis $a$ :.....	33
7.1.5 Logarithmus zur Basis $a$ :.....	33
7.1.6 Ableitungen von Exponentialfunktionen:.....	33
7.1.7 Ableitungen von Logarithmusfunktionen:.....	33
7.1.8 Wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion:.....	33
7.1.9 Wichtige Eigenschaften der Logarithmusfunktion:.....	34
7.1.10 Die Graphen von $e^x$ und $\ln(x)$ :.....	34

<b>7.2 Trigonometrische Funktionen</b> .....	<b>34</b>
7.2.1 Sinusfunktion: .....	34
7.2.2 Cosinusfunktion: .....	34
7.2.3 Wichtige Eigenschaften der Sinus- und Cosinus-Funktionen: .....	35
7.2.4 Die Graphen von $\sin(x)$ , $\cos(x)$ , $\text{Arcsin}(x)$ und $\text{Arccos}(x)$ : .....	36
7.2.5 Reelle Tangensfunktion, reelle Cotangensfunktion: .....	36
7.2.6 Die Graphen von $\tan(x)$ , $\cot(x)$ , $\text{Arctan}(x)$ und $\text{Arccot}(x)$ : .....	37
7.2.7 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen: .....	38
<b>7.3 Hyperbolische Funktionen</b> .....	<b>39</b>
7.3.1 Sinus hyperbolicus: .....	39
7.3.2 Cosinus hyperbolicus: .....	39
7.3.3 Schreibweise mit Exponentialfunktionen: .....	39
7.3.4 Symmetrie-Eigenschaften: .....	39
7.3.5 Additionstheoreme: .....	39
7.3.6 Zusammenhang mit der $\sin$ - bzw. $\cos$ -Funktion: .....	39
7.3.7 Moivresche Formel: .....	39
7.3.8 Ableitungen: .....	40
7.3.9 Grenzwerte: .....	40
7.3.10 Umkehrfunktionen: .....	40
7.3.11 Die Graphen von $\sinh(x)$ , $\cosh(x)$ , $\text{arsinh}(x)$ und $\text{arcosh}(x)$ : .....	41
7.3.12 Reeller Tangens hyperbolicus und Cotangens hyperbolicus: .....	41
7.3.13 Umkehrfunktionen: .....	42
7.3.14 Die Graphen von $\tanh(x)$ , $\text{coth}(x)$ , $\text{artanh}(x)$ und $\text{arcoth}(x)$ : .....	43
<b>8. Anwendung der Differentialrechnung</b> .....	<b>44</b>
<b>8.1 Der Mittelwertsatz und einfache Anwendungen</b> .....	<b>44</b>
8.1.1 Satz von Rolle: .....	44
8.1.2 Erster Mittelwertsatz der Differentialrechnung: .....	44
8.1.3 Addition einer Konstanten: .....	44
8.1.4 Regel von l'Hospital für den Fall $\frac{0}{0}$ : .....	44
8.1.5 Regel von l'Hospital für den Fall $\frac{\infty}{\infty}$ : .....	44
8.1.6 Grenzwerte anderer Formen: .....	44
<b>8.2 Taylorformel und Taylorreihe bei Funktionen einer Veränderlichen</b> .....	<b>44</b>
8.2.1 Taylorformel: .....	45
8.2.2 Taylorreihe, MacLaurin-Reihe: .....	45
<b>8.3 Kurvendiskussion</b> .....	<b>46</b>
Vorgehensweise: .....	46
8.3.1 Asymptote: .....	46
8.3.2 Konvexität, Konkavität: .....	47
<b>8.4 Satz von Taylor für Funktionen mehrerer Veränderlicher, Anwendungen auf Extremwertaufgaben</b> .....	<b>48</b>
8.4.1 Taylorsche Reihe für Funktionen zweier Veränderlicher: .....	48
8.4.2 Taylorsche Reihe für Funktionen von $m$ Veränderlichen: .....	48
8.4.3 Relative und absolute Extrema: .....	48
8.4.4 Hinreichende Bedingung für strenge relative Extrema: .....	49

8.4.5 Satz über implizite Funktionen: .....	49
8.4.6 Die Lagrangesche Multiplikatorregel: .....	50
<b>8.5 Fehler- und Ausgleichsrechnung.....</b>	<b>51</b>
8.5.1 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz: .....	52
8.5.2 Arithmetischer Mittelwert, Streuung: .....	52
<b>9. Integralrechnung .....</b>	<b>53</b>
<b>9.1 Definition der Stammfunktion .....</b>	<b>53</b>
9.1.1 Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ : .....	53
9.1.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: .....	53
<b>9.2 Eigenschaften und Anwendungen von Integralen .....</b>	<b>53</b>
9.2.1 Bogenlänge einer Raumkurve $K$ im Intervall $[a,b]$ : .....	53
9.2.2 Wichtige Eigenschaften von Riemann-Integralen: .....	54
<b>9.3 Integrationsmethoden .....</b>	<b>54</b>
9.3.1 Addition der Null: .....	54
9.3.2 Die Ableitung der Funktion tritt im Integranden auf: .....	54
9.3.3 Die Substitutionsmethode: .....	55
9.3.4 Partielle Integration: .....	55
9.3.5 Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung): .....	56
9.3.6 Integration rationaler Funktionen von $\sin$ und $\cos$ : .....	58
9.3.7 Integration rationaler Funktionen von $\sinh$ und $\cosh$ : .....	58
9.3.8 Integration von Potenzreihen: .....	58
9.3.9 Rotationskörper: .....	58
<b>9.4 Integrale bei Funktionen mehrerer Veränderlicher .....</b>	<b>58</b>
9.4.1 Zweidimensionale Integrale: .....	58
9.4.2 Dreidimensionale Integrale: .....	59
9.4.3 Masse $m$ und Schwerpunkt eines Körpers: .....	60
<b>9.5 Uneigentliche Integrale .....</b>	<b>60</b>
9.5.1 Konvergentes uneigentliches Integral: .....	60
9.5.2 Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale: .....	60
9.5.3 Integralkriterium: .....	60
<b>9.6 Parameterabhängige Integrale.....</b>	<b>61</b>
9.6.1 Stetigkeit von Parameterintegralen: .....	61
9.6.2 Leibniz-Regel: .....	61
<b>9.7 Integration durch Reihenentwicklung, spezielle nichtelementare Funktionen.....</b>	<b>61</b>
9.7.1 Die Gammafunktion $\Gamma(x)$ oder das Eulersches Integral zweiter Gattung: .....	61
9.7.2 Eulersche Konstante $C$ : .....	62
9.7.3 Integralsinus: .....	62
9.7.4 Integralcosinus: .....	62
9.7.5 Integralexponentialfunktion: .....	62
9.7.6 Integrallogarithmus: .....	62
9.7.7 Gauß'sches Fehlerintegral: .....	62

<b>10. Tensoren, Quadratische Formen.....</b>	<b>63</b>
<b>10.0 Allgemeine Grundlagen .....</b>	<b>63</b>
10.0.1 Linearitätseigenschaft einer Abbildung: .....	63
10.0.2 Eigenwerte und Eigenvektoren: .....	63
<b>10.1 Tensoren, Koordinatendarstellungen.....</b>	<b>64</b>
10.1.1 Geometrischer Tensor: .....	64
10.1.2 Tensor: .....	64
10.1.3 Vektorprodukt: .....	64
10.1.4 Projektionstensor: .....	64
10.1.5 Dyadisches Produkt zweier Vektoren: .....	64
10.1.6 Spiegelungstensor: .....	64
10.1.7 Drehtensor (Drehung im Raum $\mathbb{R}^3$ um eine feste Drehachse): .....	65
10.1.8 Eulersche Drehmatrizen: .....	65
10.1.9 Verkettung der Eulerschen Drehmatrizen: .....	65
10.1.10 Beispiele für Tensoren in Physik und Technik: .....	66
10.1.11 Koordinatendarstellung der Translation von Vektoren: .....	66
10.1.12 Orthogonale Transformationen: .....	66
<b>10.2 Das Normalformenproblem von Bilinearformen .....</b>	<b>67</b>
10.2.1 Hyperfläche 2. Grades oder Quadrik: .....	67
10.2.2 Mittelpunkt einer Quadrik: .....	67
10.2.3 Normalform einer Quadrik: .....	67
10.2.4 Allgemeine Vorgehensweise bei der Klassifikation von Quadriken: .....	68
<b>11. Krummlinige Koordinaten, Transformationsformel.....</b>	<b>72</b>
<b>11.1 Krummlinige Koordinaten, Jacobideterminante .....</b>	<b>72</b>
11.1.1 Krummlinige Koordinaten: .....	72
11.1.2 Jacobideterminante: .....	72
<b>11.2 Transformationsformeln .....</b>	<b>72</b>
11.2.1 Polarkoordinaten: .....	72
11.2.2 Zylinderkoordinaten: .....	73
11.2.3 Kugelkoordinaten: .....	73
11.2.4 Laplace-Operator $\Delta$ : .....	73
11.2.5 Transformationsformel: .....	73
<b>12. Gewöhnliche Differentialgleichungen.....</b>	<b>75</b>
<b>12.1 Bezeichnungen, Richtungsfeld .....</b>	<b>75</b>
12.1.1 Gewöhnliche Differentialgleichung: .....	75
12.1.2 Richtungsfeld, Isokline: .....	75
12.1.3 Lösungen: .....	75
12.1.4 Anfangswertproblem (AWP): .....	75
12.1.5 Satz von Picard-Lindelöf: .....	75
<b>12.2 Differentialgleichungen erster Ordnung.....</b>	<b>76</b>
12.2.1 Form, Anfangsbedingung: .....	76
12.2.2 Homogene Differentialgleichung: .....	76

12.2.3 Inhomogene Differentialgleichung: .....	76
12.2.4 Allgemeine Lösung: .....	76
12.2.5 Trennung der Variablen: .....	76
<b>12.3 Bernoulli'sche Differentialgleichungen .....</b>	<b>77</b>
12.3.1 Form: .....	77
12.3.2 Lösungsansatz: .....	77
<b>12.4 Differentialgleichungen <math>n</math>-ter Ordnung und Systeme erster Ordnung .....</b>	<b>77</b>
12.4.1 Form von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung: .....	77
12.4.2 Form von Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung: .....	77
12.4.3 Lösungsansatz: .....	78
12.4.4 Allgemeine Lösung: .....	78
<b>12.5 Lineare Differentialgleichungs-Systeme erster Ordnung .....</b>	<b>79</b>
12.5.1 Lineares Differentialgleichungs-System erster Ordnung: .....	79
12.5.2 Lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit von Lösungen: .....	80
12.5.3 Anzahl linear unabhängiger Lösungen: .....	80
12.5.4 Fundamentalsystem (FS), Fundamentalmatrix, Übertragungsmatrix: .....	80
12.5.5 Wronski-Determinante eines homogenen linearen DGL-Systems: .....	80
12.5.6 Lösungsverfahren für lineare Differentialgleichungs-Systeme erster Ordnung: .....	81
12.5.7 Allgemeine Lösung eines gegebenen Anfangswertproblems: .....	85
<b>12.6 Lineare Differentialgleichungen <math>n</math>-ter Ordnung .....</b>	<b>85</b>
12.6.1 Lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung: .....	85
12.6.2 Umformung in DGL-System erster Ordnung: .....	86
12.6.3 Fundamentalsystem: .....	86
12.6.4 Aufstellen eines Fundamentalsystems: .....	86
12.6.5 Fundamentalmatrix, Übertragungsmatrix: .....	87
12.6.6 Wronski-Determinante: .....	87
12.6.7 Allgemeines Lösungsverfahren: .....	87
12.6.8 Tabelle zur Lösungsbasis von linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: .....	89
<b>12.7 Eulersche Differentialgleichungen .....</b>	<b>90</b>
12.7.1 Form Eulerscher Differentialgleichungen .....	90
12.7.2 Allgemeines Lösungsverfahren: .....	90
12.7.3 Spezielle Eulersche Differentialgleichung zweiter Ordnung: .....	90
<b>12.8 Rand- und Eigenwertprobleme .....</b>	<b>90</b>
12.8.1 Begriff des Randwertproblems (RWP): .....	90
12.8.2 Begriff des Eigenwertproblems bei Differentialgleichungen: .....	90
<b>12.9 Autonome Differentialgleichungen 2. Ordnung .....</b>	<b>91</b>
12.9.1 Form, Anfangswerte: .....	91
12.9.2 Äquivalentes DGL-System erster Ordnung: .....	91
12.9.3 Singuläre Punkte: .....	92
12.9.4 Phasenkurve (PK): .....	92
12.9.5 Bestimmung der Phasenkurve, Lösen von Anfangswertproblemen: .....	92
12.9.6 Spezielle autonome Differentialgleichungen 2. Ordnung: .....	93
12.9.7 Lösungsverfahren der speziellen Differentialgleichung: .....	94

12.9.8 Autonome Differentialgleichungs-Systeme: .....	94
12.9.9 Klassifizierung von singulären Punkten, Phasenportraits:.....	95
<b>13. Fourierreihen.....</b>	<b>99</b>
<b>13.1 Trigonometrische Polynome und minimale Integralmittel .....</b>	<b>99</b>
13.1.1 Periodizität: .....	99
13.1.2 Trigonometrisches Polynom $n$ -ten Grades:.....	99
13.1.3 Primäre Problemstellung:.....	99
13.1.4 Integralmittel: .....	99
13.1.5 Fourierkoeffizienten (FK):.....	99
13.1.6 Unterscheidung bei geraden und ungeraden Funktionen: .....	100
13.1.7 Konvergenz: .....	100
13.1.8 Fourierreihe:.....	100
13.1.9 Dirichlet-Term: .....	100
13.1.10 Fourierreihenentwicklungen einiger $2\pi$ -periodischer Funktionen:.....	101
<b>13.2 Eine Anwendung auf die Saitenschwingung.....</b>	<b>102</b>
13.2.1 Zugehöriges Randwertproblem:.....	102
13.2.2 Separierte Differentialgleichungen: .....	102
13.2.3 Ermittlung der Eigenfunktionen: .....	102
13.2.4 Lösung der Differentialgleichung: .....	102
13.2.5 Fourierreihen von $f$ bzw. $g$ : .....	102
<b>14. Kurven und Flächen .....</b>	<b>103</b>
<b>14.1 Kurven im <math>\mathbb{R}^2</math> und <math>\mathbb{R}^3</math>.....</b>	<b>103</b>
14.1.1 Parameterdarstellung eines Kurvenbogens, Parametertransformation: .....	103
14.1.2 Spezielle zulässige Parametertransformation auf „Bogenlänge“:.....	103
14.1.3 Tangentenvektor, Normalenvektor und Krümmung einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ : .....	103
14.1.4 Begleitendes Dreibein einer Kurve im $\mathbb{R}^3$ : .....	103
14.1.5 Frenetsche Formeln:.....	104
14.1.6 Bezüglich der Zeit parametrisierte Kurven im $\mathbb{R}^3$ : .....	104
<b>14.2 Einführung in die lokale Theorie der Flächen im <math>\mathbb{R}^3</math>.....</b>	<b>104</b>
14.2.1 Parameterdarstellung eines Flächenstückes, Parametertransformation: .....	104
14.2.2 Kurven auf Flächen:.....	105
14.2.3 Koeffizienten der 1. Fundamentalform:.....	105
14.2.4 Eigenschaften, Anwendungen:.....	105
14.2.5 Flächen in expliziter Form: .....	106
<b>15. Kurven- und Oberflächenintegrale .....</b>	<b>107</b>
<b>15.1 Orientierte und nicht orientierte Kurvenintegrale .....</b>	<b>107</b>
15.1.1 Orientiertes Kurvenintegral: .....	107
15.1.2 Nicht orientiertes Kurvenintegral: .....	107
15.1.3 Eigenschaften von Kurvenintegralen, Rechenregeln: .....	107
15.1.4 Potential eines Vektorfeldes: .....	108
15.1.5 Sternförmiges Gebiet: .....	108

<b>15.2 Orientierte und nicht orientierte Oberflächenintegrale</b> .....	<b>108</b>
15.2.1 Orientiertes Oberflächenintegral:.....	108
15.2.2 Nicht orientiertes Oberflächenintegral:.....	109
15.2.3 Rechenregeln:.....	109
15.3.3 Explizit gegebene Funktionen: .....	109
<b>16. Integralsätze und Vektoranalysis</b> .....	<b>110</b>
<b>16.1 Satz von Gauß in Ebene und Raum</b> .....	<b>110</b>
16.1.1 Divergenz eines Vektorfeldes: .....	110
16.1.2 Satz von Gauß in der Ebene:.....	110
16.1.3 Satz von Gauß im Raum: .....	110
16.1.4 Fluß von $\underline{v}$ durch $\partial G$ : .....	110
16.1.5 Zirkulation von Vektorfeldern: .....	110
<b>16.2 Satz von Stokes</b> .....	<b>111</b>
16.2.1 Rotation eines Vektorfeldes:.....	111
16.2.2 Satz von Stokes:.....	111
16.2.3 Vektorpotential: .....	111
<b>16.3 <math>\nabla</math>-Rechnung (Nablarechnung)</b> .....	<b>111</b>
16.3.1 $\nabla$ -Operator: .....	111
16.3.2 Rechenregeln:.....	112
<b>16.4 Der Green'sche Integralsatz</b> .....	<b>112</b>
16.4.1 Green'scher Integralsatz: .....	112
16.4.2 Anwendung: .....	112
<b>16.5 Exakte Differentialgleichungen</b> .....	<b>113</b>
16.5.1 Exakte Differentialgleichungen: .....	113
16.5.2 Exakte Differentialgleichungen in sternförmigen Gebieten: .....	113
16.5.3 Spezielle Vektorpotentiale:.....	113
16.5.4 Singuläre Punkte von exakten Differentialgleichungen:.....	113
16.5.5 Integrierender Faktor $m(x,y)$ :.....	113
16.5.6 Bestimmung von integrierenden Faktoren für bestimmte Differentialgleichungen: ....	114
16.5.7 Implizite Lösungen von nicht exakten Differentialgleichungen:.....	114
<b>A. Anhang: Tabellen und Kurzreferenzen</b> .....	<b>115</b>
<b>A.1 Trigonometrische Funktionswerte an besonderen Winkeln</b> .....	<b>115</b>
<b>A.2 Zusammenhänge der trigonometrischen Funktionen</b> .....	<b>115</b>
<b>A.3 Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen</b> .....	<b>116</b>
A.3.1 Summe und Differenz: .....	116
A.3.2 Vielfache: .....	116
A.3.3 Potenzen:.....	116
<b>A.4 Einheitskreis</b> .....	<b>117</b>

## Verzeichnis der Abbildungen und Tabellen

### Abbildungen

Abbildung 1: Pascal'sches Dreieck .....	15
Abbildung 2: Die Graphen von $e^x$ und $\ln(x)$ .....	34
Abbildung 3: Die Graphen von $\sin(x)$ , $\cos(x)$ , $\text{Arcsin}(x)$ und $\text{Arccos}(x)$ .....	36
Abbildung 4: Die Graphen von $\tan(x)$ , $\cot(x)$ , $\text{Arctan}(x)$ und $\text{Arccot}(x)$ .....	37
Abbildung 5: Die Graphen von $\sinh(x)$ , $\cosh(x)$ , $\text{arsinh}(x)$ und $\text{arcosh}(x)$ .....	41
Abbildung 6: Die Graphen von $\tanh(x)$ , $\coth(x)$ , $\text{artanh}(x)$ und $\text{arcoth}(x)$ .....	43
Abbildung 7: Exponentialfunktion angenähert durch Taylorpolynome.....	45
Abbildung 8: Bezeichnungen am Funktionsgraphen .....	47
Abbildung 9: Ellipsoid.....	69
Abbildung 10: Zweischaliges Hyperboloid.....	69
Abbildung 11: Einschaliges Hyperboloid .....	70
Abbildung 12: Kegel mit Spitze in $\underline{m}$ .....	70
Abbildung 13: Elliptischer Zylinder .....	70
Abbildung 14: Hyperbolischer Zylinder .....	70
Abbildung 15: Elliptisches Paraboloid .....	70
Abbildung 16: Hyperbolisches Paraboloid .....	70
Abbildung 17: Parabolischer Zylinder .....	70
Abbildung 18: Knoten 1. Art .....	95
Abbildung 19: Knoten 2. Art .....	95
Abbildung 20: Sternpunkt.....	95
Abbildung 21: Sattelpunkt .....	96
Abbildung 22: Strudelpunkt.....	96
Abbildung 23: Wirbelpunkt .....	96
Abbildung 24: Stabilitätskarte für lineare autonome DGL-Systeme im $\mathbb{R}^2$ .....	98
Abbildung 25: Sternförmiges Gebiet .....	108

### Tabellen

Tabelle 1: Klassifikation von Zentrumsquadricken.....	68
Tabelle 2: Klassifikation von Quadricken mit leerem Zentrum .....	69
Tabelle 3: Lösungsbasis von linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....	89
Tabelle 4: Fourierreihenentwicklungen einiger $2\pi$ -periodischer Funktionen.....	101
Tabelle 5: Trigonometrische Funktionswerte an besonderen Winkeln.....	115
Tabelle 6: Zusammenhänge der trigonometrischen Funktionen.....	115

---

Titelgrafik erstellt mit Maple V Release 4 von Waterloo Maple Inc.

$$\text{Funktion: } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -10 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \cos(5t) + 15 \cdot \sin(2t) \\ 10 \cdot \sin(t) - 2 \cdot \sin(5t) - 15 \cdot \sin(2t) \\ 10 \cdot \cos(3t) \end{pmatrix}$$

So kann also die Mathematik definiert werden  
als diejenige Wissenschaft, in der wir niemals das kennen,  
worüber wir sprechen, und niemals wissen, ob das,  
was wir sagen, wahr ist. **Bertrand Russell**

---

Alle Angaben sind ohne Gewähr.  
Nur für den Privatgebrauch bestimmt.

---

[kontakt@bodokarlmueller.de](mailto:kontakt@bodokarlmueller.de)

---

## 1. Zahlbereiche und ihre Eigenschaften

### 1.1 Natürliche Zahlen:

Symbol:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

### 1.2 Ganze Zahlen:

Symbol:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

### 1.3 Rationale Zahlen:

Symbol:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0 \right\}$

### 1.4 Reelle Zahlen:

Symbol:  $\mathbb{R}$

#### 1.4.1 Axiome der Addition:

1.4.1.1  $a + b = b + a$

1.4.1.2  $(a + b) + c = a + (b + c)$

1.4.1.3 Die Gleichung  $a + x = b$  ist immer eindeutig lösbar.

1.4.1.4  $-(-a) = a$

#### 1.4.2 Axiome der Multiplikation:

1.4.2.1  $a \times b = b \times a$

1.4.2.2  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

1.4.2.3  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

1.4.2.4 Die Gleichung  $a \times x = b$  ist für alle  $a \neq 0$  eindeutig lösbar.

#### 1.4.3 Axiome der Ordnung:

1.4.3.1  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c$

1.4.3.2  $a < b; c$  beliebig  $\Rightarrow a + c < b + c$

1.4.3.3  $a < b; c > 0 \Rightarrow a \times c < b \times c$

#### 1.4.4 Archimedisches Axiom:

Zu jeder reellen Zahl  $x$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , für die gilt:  $n > |x|$

Zu jeder reellen Zahl  $x > 0$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , für die gilt:  $n^{-1} < x$

#### 1.4.5 Axiom der Vollständigkeit:

Jede Verknüpfung zweier reeller Zahlen gemäß dieser Axiome ergibt wieder eine reelle Zahl.

#### 1.4.6 Bemerkung:

*Dreiecksungleichung:*  $\| |a| - |b| \| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

### 1.5 Komplexe Zahlen:

Symbol:  $\mathbb{C} = \{z \mid z = (x, y) \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$

Die Menge der komplexen Zahlen ist ein algebraischer Körper bezüglich Addition und Multiplikation.

Imaginäre Einheit:  $i^2 = -1$

### 1.5.1 Schreibweisen:

Schreibweise einer komplexen Zahl  $z$ :

$$z = x + i \cdot y$$

Mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\mathbf{j} = \arctan \frac{y}{x}$  wird daraus :

$$\begin{aligned} z &= r \cdot [\cos(\mathbf{j}) + i \cdot \sin(\mathbf{j})] \\ &= r \cdot \text{cis}(\mathbf{j}) \\ &= r \cdot e^{i\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Es gilt die Dreiecksungleichung.

### 1.5.2 Die Moivre'sche Formel:

$$\begin{aligned} z^n &= [r \cdot \text{cis}(\mathbf{j})]^n \\ &= r^n \cdot \text{cis}(n \cdot \mathbf{j}) \\ &= r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \mathbf{j}} \end{aligned}$$

Die Exponentialschreibweise von  $z$  wird als **Polarform von  $z$**  bezeichnet.

## 1.6 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Es sei  $n_0$  eine natürliche Zahl und  $A(n)$  für alle natürlichen Zahlen  $n \geq n_0$  eine Aussage. Es gelte:

### 1.6.1 Induktionsanfang:

$A(n_0)$  ist eine wahre Aussage.

### 1.6.2 Induktionsvoraussetzung:

Die Annahme der Gültigkeit dieser Aussage für alle  $n \geq n_0$

### 1.6.3 Induktionsschluß:

$[A(n) \Rightarrow A(n+1)]$  ist wahr für alle  $n \geq n_0$

Damit ist die Gültigkeit der Aussage  $A(n)$  bewiesen.

### 1.6.4 Beispiel: Bernoullische Ungleichung:

Es sei  $x$  eine reelle Zahl mit  $-1 \leq x$ . Ferner sei  $n$  eine natürliche Zahl. Dann gilt für alle  $n$  die Bernoullische Ungleichung:  $A(n): 1 + n \cdot x \leq (1 + x)^n$

Beweis unter Verwendung vollständiger Induktion:

Induktionsanfang:  $n_0 = 1: 1 + x \leq (1 + x)^1 = 1 + x$  (gilt insbesondere für  $-1 \leq x$ )

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für ein  $n \in \mathbb{Z}$ , also  $1 + n \cdot x \leq (1 + x)^n$ .

Induktionsschluß: Zu zeigen ist, daß die Behauptung dann auch für  $n + 1$  gilt, also  $1 + (n + 1) \cdot x \leq (1 + x)^{n+1}$ . Außerdem gilt: Da  $-1 \leq x$  ist, ist  $1 + x \geq 0$ .  
Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n \cdot (1 + x) \\ &\geq (1 + n \cdot x) \cdot (1 + x) \\ &= 1 + (n + 1) \cdot x + n \cdot x^2 \\ &\geq 1 + (n + 1) \cdot x \end{aligned}$$

Damit ist die Gültigkeit der Bernoullischen Ungleichung bewiesen.

## 1.7 Fakultät, Binomialkoeffizient, Binomischer Lehrsatz

### 1.7.1 Die Fakultät:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k$$

### 1.7.2 Der Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{wenn } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{wenn } k > n \end{cases}$$

### 1.7.3 Der Binomische Lehrsatz:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \quad (\text{siehe Pascalsches Dreieck})$$

Der binomische Lehrsatz kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

### 1.7.4 Pascal'sches Dreieck:

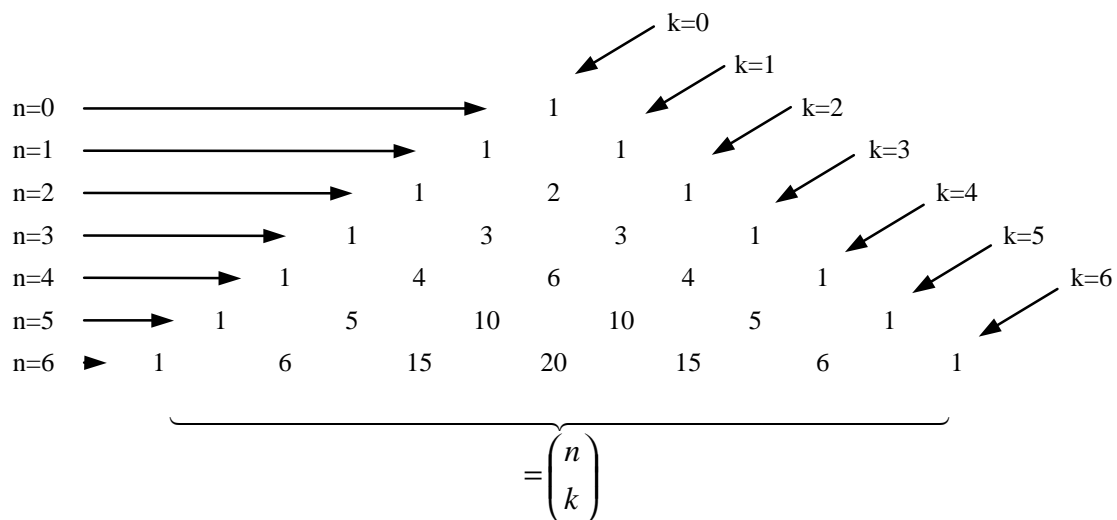


Abbildung 1: Pascal'sches Dreieck

## 1.8 Der Fundamentalsatz der Algebra

Ein Polynom n-ten Grades kann immer folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned}P(z) &= a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_n \cdot z^n \\ &= a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)\end{aligned}$$

Mit  $a_n \neq 0 \wedge a_i \in \mathbb{C}$

Die Zahlen  $z_i$  heißen **Nullstellen des Polynoms P**.

Jedes Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle.

## 2. Vektorrechnung, analytische Geometrie, lineare Gleichungssysteme

### 2.1 Vektorrechnung, analytische Geometrie

#### 2.1.1 Vektorielle Addition:

$$\underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

#### 2.1.2 Skalarprodukt:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = \sum_{j=1}^n a_j \cdot b_j \in \mathbb{R}$$

Zusätzlich gilt:  $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$

#### 2.1.3 Länge des Vektors $\underline{a}$ :

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{a^2}$$

#### 2.1.4 Schwarzsche Ungleichung:

$$|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\|$$

Ferner gilt die Dreiecksungleichung

#### 2.1.5 Orthogonale Projektion von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$ :

$$\text{Proj}_{\underline{b}} \underline{a} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\|\underline{b}\|^2} \cdot \underline{b} = \lambda \cdot \underline{b}$$

#### 2.1.6 Winkel zwischen zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ :

$$\cos \alpha = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{\|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\|}$$

#### 2.1.7 Raumprodukt (Spatprodukt):

$$\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$$

Es erzeugt es ein **Rechtssystem**, falls es positiv ist, und ein **Linkssystem**, falls es negativ ist. Das Vektortripel heißt **ausgeartet (linear abhängig)**, falls das Spatprodukt null ist.

**2.1.8 Vektorprodukt (Kreuzprodukt):**

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Ist das Kreuzprodukt null, so sind die beiden Vektoren *linear abhängig*.

**2.1.9 Vektorielle Darstellung einer Gerade in Punkt-Richtungsform:**

$$g: \underline{\vec{x}} = \underline{\vec{p}} + t \cdot \underline{a}$$

**2.1.10 Vektorielle Darstellung einer Gerade in Hesseform:**

$$g: \underline{\vec{x}} \cdot \underline{\eta} = d$$

**2.1.11 Vektorielle Darstellung einer Gerade in Hesse-Normalenform:**

$$g: \frac{1}{\|\underline{\eta}\|} \cdot \underline{\vec{x}} \cdot \underline{\eta} = \frac{d}{\|\underline{\eta}\|}$$

Die Darstellungsarten in Hesseform sind nur im zweidimensionalen Vektorraum möglich, im dreidimensionalen Raum repräsentieren sie Ebenen.

**2.1.12 Plückerform einer Gerade im dreidimensionalen Vektorraum:**

$$g: \underline{\vec{x}} \times \underline{a} = \underline{m}$$

**2.1.13 Darstellung einer Ebene in Punkt-Richtungsform:**

$$E: \underline{\vec{x}} = \underline{\vec{p}} + l \cdot \underline{a}_1 + m \cdot \underline{a}_2$$

**2.1.14 Darstellung einer Ebene in Hesseform:**

$$E: \underline{\vec{x}} \cdot \underline{h} = d$$

**2.1.15 Darstellung einer Ebene in Hesse-Normalenform:**

$$E: \frac{1}{\|\underline{\eta}\|} \cdot \underline{\vec{x}} \cdot \underline{\eta} = \frac{d}{\|\underline{\eta}\|}$$

**2.1.16 Umrechnungsformeln der Ebenenformen:**

$$\underline{\eta} = \underline{a}_1 \times \underline{a}_2 \\ d = \underline{\vec{p}} \cdot \underline{h} = \underline{\vec{p}} \cdot (\underline{a}_1 \times \underline{a}_2)$$

**2.1.17 Identität von Lagrange:**

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \cdot (\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d}) \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c})$$

## 2.2 Lineare Gleichungssysteme

Eine Linearkombination aus  $n$  Vektoren des Grades  $n$  bildet ein lineares Gleichungssystem, wenn ein bestimmter Vektor als Ergebnis der Linearkombination gefordert wird. Ist dieser Vektor der Nullvektor, so spricht man von einem **homogenen Gleichungssystem**, andernfalls von einem **inhomogenen Gleichungssystem**.

$$x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + x_3 \cdot \underline{a}_3 + \dots + x_n \cdot \underline{a}_n = \underline{b}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n x_j \cdot \underline{a}_j = \underline{b}$$

Ein LGS ist **lösbar**, falls genügend linear unabhängige Gleichungen vorhanden sind. Sind bei einem LGS vom **Rang  $n$**  (d.h. mit  $n$  Unbekannten) nur  $r$  linear unabhängige Gleichungen gegeben, so beträgt der **Defekt  $d$**  des Gleichungssystems:  $d = n - r$ .

### 2.2.1 Allgemeines Lösungsverfahren:

Zunächst wird die Hauptdeterminante  $D$  berechnet, was bis Rang  $n = 3$  ohne weitere Umformungen möglich ist. Ist der Rang  $n > 3$ , ist meistens der Gauß'sche Algorithmus am günstigsten.

1. Fall:  $D = 0$ : keine eindeutige Lösung  $\Rightarrow$  Gauß'scher Algorithmus (Lösungsmenge ist eine Ebene oder eine Gerade)
2. Fall:  $D \neq 0$ : eindeutige Lösung  $\Rightarrow$  Cramer'sche Regel (Determinantenverfahren)

Zum Schluß wird die Lösungsmenge als Vektor oder Zahlentupel aufgeschrieben.

### 2.2.2 Der Gauß'sche Algorithmus:

Das Prinzip besteht darin, eine Gleichung dazu zu benutzen, aus den restlichen eine Unbekannte zu eliminieren. Dies wird dann so lange fortgesetzt, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten vorhanden ist. Danach wird rückwärts in alle Gleichungen eingesetzt, womit man alle Unbekannten erhält und das LGS löst.

Die folgenden zwei Beispiele zeigen ein eindeutig lösbares und ein nicht eindeutig lösbares LGS.

#### 1. Beispiel:

Folgendes LGS ist gegeben. Gesucht ist dessen Lösungsmenge.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 2 \\3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -2\end{aligned}$$

Durch rückwärtiges Lösen der Gleichungen XVI bis XIII erhält man:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &= 1 \\x_3 &= 0 \\x_4 &= -1\end{aligned}$$

Die Probe durch Einsetzen bestätigt dieses Ergebnis.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$		Operation
I	1	2	3	4	-2	
II	2	3	4	1	2	
III	3	4	1	2	2	
IV	4	1	2	3	-2	
V	1	2	3	4	-2	
VI	0	-1	-2	-7	6	=II-2I
VII	0	-2	-8	-10	8	=III-3I
VIII	0	-7	-10	-13	6	=IV-4I
IX	1	2	3	4	-2	
X	0	-1	-2	-7	6	
XI	0	0	-4	4	-4	=VII-2VI
XII	0	0	4	36	-36	=VIII-7VI
XIII	1	2	3	4	-2	
XIV	0	-1	-2	-7	6	
XV	0	0	-4	4	-4	
XVI	0	0	0	40	-40	=XI+XII

2. Beispiel:

Folgendes LGS ist gegeben. Es enthält mehr Gleichungen als Unbekannte.

$$\begin{aligned}-x_1 - 3x_2 - 12x_3 &= -5 \\-x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\5x_2 + 17x_3 &= 7 \\3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\7x_1 - 4x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

Eine Lösung existiert, sie ist aber nicht eindeutig. Es kann eine Unbekannte als Parameter wählen, z.B.  $x_3$ .

Die Lösung lautet dann:

$$\begin{aligned}t &\in (-\infty; \infty) \\x_1 &= \frac{4}{5} - \frac{9}{5}t \\x_2 &= \frac{7}{5} - \frac{17}{5}t \\x_3 &= t\end{aligned}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$		Operation
I	-1	-3	-12	-5	
II	-1	2	5	2	
III	0	5	17	7	
IV	3	-1	2	1	
V	7	-4	-1	0	
VI	-1	-3	-12	-5	
VII	0	-5	-17	-7	=I-II
VIII	0	5	17	7	=III
IX	0	-10	-34	-14	=3I+I
X	0	-25	-85	-35	=7I+V
XI	-1	-3	-12	-5	
XII	0	-5	-17	-7	
XIII	0	0	0	0	
XIV	0	0	0	0	
XV	0	0	0	0	

Die geometrische Deutung der Lösungsmenge eines LGS mit drei Unbekannten ist die Bestimmung der Schnittmenge der durch die drei Gleichungen des LGS gegebenen Ebenen. In diesem Beispiel ist die Lösungsmenge eine Gerade:

$$g : \vec{x} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} t \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

### 2.2.3 Die Cramer'sche Regel:

Ist die Determinante der Koeffizientenmatrix eines LGS nicht null, dann lassen sich die Unbekannten  $x_k$  sofort berechnen. Man berechnet dabei zur Bestimmung z.B. der Unbekannten  $x_3$  Die Determinante  $D_3$ , die sich durch Vertauschen des 3.Spaltenvektors der Koeffizientendeterminante mit dem Vektor der absoluten Glieder ergibt. Aus diesen beiden Determinanten berechnet sich die Unbekannte  $x_3$  als deren Quotient.

$$\text{Allgemein: } x_n = \frac{D_n}{D}$$

Die mit der Cramer'schen Regel berechneten Lösungen sind immer eindeutig.

### 3. Matrizen, Matrixalgebra

#### 3.1 Beispiele für (m,n)-Matrizen

##### 3.1.1 (n,n)-Einheitsmatrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

##### 3.1.2 (m,n)-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Der erste Index bei den Einträgen  $a_{ij}$  heißt **Zeilenindex** und gibt die Zeile an, in der der Eintrag steht, der zweite ist der **Spaltenindex** und gibt die Spalte der Matrix an, in der der Eintrag steht.

#### 3.2 Rechnen mit Matrizen

##### 3.2.1 Addition zweier (m,n)-Matrizen A und B, Multiplikation mit einer Konstanten k:

Alle Einträge werden einzeln addiert, d.h.  $C = A + B$  bzw.  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Alle Einträge werden einzeln mit  $k$  multipliziert.  $C = kB$  bzw.  $c_{ij} = kb_{ij}$

##### 3.2.2 Transponieren einer (m,n)-Matrix A:

Es entsteht eine **(n,m)-Matrix**  $A^T$ , für deren Einträge  $a_{jiA^T}$  gilt:  $a_{jiA^T} = a_{ijA}$

##### 3.2.2.1 Zusatzeigenschaften bei (n,n)-Matrizen:

Eine (n,n)-Matrix A heißt **symmetrisch**, wenn gilt:  $A^T = A$

Eine (n,n)-Matrix A heißt **antisymmetrisch**, wenn gilt:  $A^T = -A$

Beispiel: Gegeben sind die Matrizen A und B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -7+2 \\ 3+2 & 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot B = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 2 & 5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = B$$

### 3.2.3 Verkettung von Matrizen, Matrixmultiplikation:

Generell ist dies nur möglich, wenn die erste Matrix  $(m,n)$  dieselbe Anzahl von Spalten hat wie die zweite Matrix  $(p,q)$  Zeilen, d.h. wenn  $n = p$ .

Es entsteht eine  $(m,q)$ -Matrix.

Deren Einträge lauten dann allgemein: 
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Beispiel: Gegeben seien die beiden Matrizen  $A$  und  $B$ : 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wird  $A$  mit  $B$  verkettet, so entsteht eine  $(2,2)$ -Matrix: 
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Umgekehrt entsteht eine  $(3,3)$ -Matrix: 
$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: **Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ.**

Aber: *Multiplikation von  $(n,n)$ -Matrizen ist assoziativ, es gilt auch das Distributivgesetz.*

#### 3.2.3.1 Dyadisches Produkt:

So heißt das Produkt einer  $(n,1)$ -Matrix mit einer  $(1,n)$ -Matrix. Es entsteht eine  $(n,n)$ -Matrix.

### 3.2.4 Matrixinversion quadratischer Matrizen:

Es gilt für die zu  $A$  inverse Matrix  $A^{-1}$ : 
$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Bedingung für Invertierbarkeit:  $\det(A) \neq 0$

### 3.2.5 Rang einer Matrix:

Unter dem Rang  $r(A)$  der  $(m,n)$ -Matrix  $A$  versteht man Folgendes: Die Maximalanzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (Spaltenvektoren) heißt Zeilenrang (Spaltenrang) der Matrix  $A$ . *Zeilenregulär* ist die Matrix  $A$ , wenn  $r(A) = m$ , *spaltenregulär*, wenn  $r(A) = n$ .

Eine  $(n,n)$ -Matrix heißt *regulär*, wenn  $r(A) = n$  und *singulär*, wenn  $r(A) < n$ .

Die Existenz der Inversen  $A^{-1}$  und die Regularität von  $A$  sind *äquivalent*.

Zur Berechnung des Ranges einer  $(m,n)$ -Matrix werden die größtmöglichen Unterdeterminanten gebildet. Ist eine von ihnen nicht null, so ist der Rang gleich der Ordnung (Anzahl der Spaltenvektoren) dieser Unterdeterminante. Gegebenenfalls muß die Ordnung der Unterdeterminante verringert werden, bis eine von ihnen ungleich null ist.

### 3.2.6 Lösung einfacher Matrixgleichungen:

Die Gleichung  $A \cdot X = B$  hat die Lösung 
$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Dies setzt die Existenz der inversen Matrix  $A^{-1}$  voraus.

### 3.2.7 Rechenregeln für Determinanten:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \quad (\text{Produktregel})$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(E_n) = 1$$

$$\det(c \cdot A) = c^n \cdot \det(A) \quad \text{für } (n,n)\text{-Matrizen}$$

### 3.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Gegeben sei eine lineare Abbildung  $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$

Unter den **Eigenwerten**  $\lambda$  und den **Eigenvektoren**  $\underline{n}$  der Matrix  $A$  versteht man alle diejenigen Konstanten bzw. Vektoren, für die gilt:

$$A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$$

Aus dieser Definition folgt:

$$A \cdot \underline{n} = \lambda \cdot \underline{n} \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot E) \underline{n} = \underline{0}$$

für  $\underline{n} \neq \underline{0}$  (Nullvektor) folgt sofort :

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$$

In Determinantenschreibweise:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Beispiel: Gesucht sind alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1 - \lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -2$$

Die einzelnen Eigenwerte werden in das jeweilige (überbestimmte) homogene Gleichungssystem eingesetzt und dessen Lösungsmenge nach bekannten Verfahren bestimmt. Diese ist dann der zum einzelnen Eigenwert gehörende Eigenvektor. In der Regel werden die Eigenvektoren auf den Betrag 1 normiert.

Ein Spezialfall ergibt sich, wenn außer der Hauptdiagonalen der Matrix nur Nullen in ihr stehen. Die Zahlen in der Hauptdiagonalen sind dann zugleich die Eigenwerte der Matrix.

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

## 4. Folgen und Reihen

### 4.1 Folgen

#### 4.1.1 Teilfolge:

Unter einer Teilfolge versteht man eine Folge, die durch Wegstreichen von bestimmten Gliedern aus einer anderen Folge, aber ohne Veränderung der Reihenfolge, aus jener Folge entsteht.

#### 4.1.2 Konvergenz:

Eine Folge oder Reihe konvergiert, wenn die Differenz zwischen einem Folgenglied (bzw. die Folge der Partialsummen der Reihe) und dem zugehörigen Grenzwert jeden beliebigen reellen Wert unterschreiten kann:

$$|a_k - a| \leq \varepsilon \iff \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$$

#### 4.1.3 Divergenz:

Eine nicht konvergente Folge (oder Reihe) heißt divergent. Sie heißt *bestimmt divergent*, wenn gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = \infty$$

#### 4.1.4 Beschränkte Folgen:

Eine Folge heißt beschränkt, wenn es eine positive reelle Zahl gibt, die gegenüber dem einzelnen Absolutbetrag jedes einzelnen Folgengliedes immer größer (oder gleich) ist. Sie ist nach *unten beschränkt*, wenn der Absolutbetrag  $|a| = -a$  ist und nach *oben beschränkt*, wenn  $|a| = a$  ist. Eine Vektorfolge heißt beschränkt, wenn der Betrag der Folgenvektoren beschränkt ist. Dies wiederum ist der Fall, wenn jede Komponentenfolge beschränkt ist.

#### 4.1.5 Monotonie:

Wenn alle  $k \in \mathbb{N}$  sind, kann für Folgen formuliert werden:

$$\text{Monoton wachsend: } a_{k+1} \geq a_k$$

$$\text{Streng monoton wachsend: } a_{k+1} > a_k$$

$$\text{Monoton fallend: } a_{k+1} \leq a_k$$

$$\text{Streng monoton fallend: } a_{k+1} < a_k$$

#### 4.1.6 Eulersche Zahl:

Die Eulersche Zahl  $e$  ist der Grenzwert einer Folge:

$$e = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \approx 2,71828\dots$$

#### 4.1.7 Konvergenzkriterium von Cauchy:

*Satz und Definition:* Eine reelle oder komplexe Folge bzw. Vektorfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d.h. es gibt zum  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $N(\varepsilon)$ , für die existiert

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \quad n, m \geq N(\varepsilon)$$

#### 4.1.8 Rekursiv definierte Folgen:

Die Folgenglieder werden mit Hilfe des vorherigen bestimmt, z.B.:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + \frac{1}{a_n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

#### 4.1.9 Regeln bei Grenzwertbestimmungen:

Seien gegeben :  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$      $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$      $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$      $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \infty$

Daraus folgt :  $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k + b_k) = a + b$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k + b_k) = \infty$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k + b_k) = \infty$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (c \cdot b_k) = c \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} (b_k) = c \cdot b$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (c \cdot b_k) = c \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} (b_k) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } c > 0 \\ -\infty & \text{wenn } c < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k \cdot b_k) = a \cdot b$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k \cdot b_k) = \infty$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{a}{b} \quad \text{wenn } b_k \neq 0 \forall k \in [1, \infty)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{a_k}{b_k} \right) = 0 \quad \text{wenn } b_k \neq 0 \forall k \in [1, \infty)$$

#### 4.1.10 Alternierende Folgen:

Folgen, die mit jedem Folgenglied zwischen positiven und negativen Werten schwanken, heißen alternierende Folgen.

Beispiel:  $a_k = (-1)^{k-5}$

## 4.2 Unendliche Reihen

Wird einer unendlichen Folge von Zahlen eine Summe zugeordnet, die als Summanden die Folgenglieder haben, so heißt diese Summe **unendliche Reihe**. Werden nur die Folgenglieder bis zur Stelle k addiert, so spricht man von der **k-ten Partialsumme** der Reihe. Die Konvergenz, Divergenz und Monotonie wird definiert wie bei Folgen.

#### 4.2.1 Cauchy-Kriterium für Reihen:

Es besagt analog zum Cauchy-Kriterium für Folgen, daß es zu jeder Differenz zweier Partialsummen m und n, welche kleiner als ein  $\epsilon > 0$  ist, ein  $N(\epsilon)$  gibt, für das gilt:  $m \geq n \geq N(\epsilon)$ . Allgemein muß gelten, daß die Folge der Partialsummen konvergiert.

Beispiel: Die **harmonische Reihe**  $\sum \frac{1}{k}$  ist divergent.

Erfüllt eine Reihe das Cauchy-Kriterium, so gilt:  $\sum a_k$  konvergent  $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

**4.2.2 Majoranten- und Minorantenkriterium:**

Mit der Reihe  $\sum a_k$ ,  $a_k \in \mathbb{C}$ , läßt sich sagen:

4.2.2.1 Die konvergente Reihe  $\sum b_k$ ,  $b_k \in \mathbb{R}_+$  heißt **Majorantenreihe** von  $\sum a_k$ , wenn ab einer bestimmten Stelle  $N_0$  das Reihenglied  $b_k$  ständig größer ist als  $|a_k|$ . Dann ist die Reihe  $\sum a_k$  absolut konvergent.

4.2.2.2 Die divergente Reihe  $\sum c_k$ ,  $c_k \in \mathbb{R}_+$  heißt **Minorantenreihe** von  $\sum |a_k|$ , wenn ab einer bestimmten Stelle  $N_0$  das Reihenglied  $c_k$  ständig kleiner ist als  $|a_k|$ . Dann ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  divergent (die Reihe  $\sum a_k$  nicht absolut konvergent).

**4.2.3 Die geometrische Reihe:**

Allgemein lautet sie:  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ,  $q \in \mathbb{C}$

Bedingung für Konvergenz:  $|q| < 1$ :  $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p q^k = \frac{1}{1-q}$

Bedingung für Divergenz:  $|q| \geq 1$ :  $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p q^k = \infty$

**4.2.4 Das Quotientenkriterium:**

Es sei  $\sum a_k$ ,  $a_k \in \mathbb{C}$  eine beliebige Reihe. Es gilt für diese Reihe:

Für  $g = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$  gilt:

$g < 1 \Rightarrow \sum a_k$  konvergiert absolut

$g > 1 \Rightarrow \sum a_k$  divergiert

$g = 1 \Rightarrow$  keine Aussage über das Konvergenzverhalten möglich

**4.2.5 Wurzelkriterium:**

Die Reihe  $\sum a_k$ ,  $a_k \in \mathbb{C}$  ist gegeben.

Für  $g = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$  gilt:

$g < 1 \Rightarrow \sum a_k$  konvergiert absolut

$g > 1 \Rightarrow \sum a_k$  divergiert

$g = 1 \Rightarrow$  keine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten möglich

### 4.2.6 Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen:

Ist die Folge der Reihenglieder monoton fallend und deren Grenzwert null, so ist die Reihe konvergent.

### 4.2.7 Cauchy-Produkt, Satz von Mertens:

Das *Cauchy-Produkt* zweier Reihen wird definiert als:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit} \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}$$

*Satz von Mertens:* Konvergiert eine Reihe gegen  $A$  und eine andere gegen  $B$ , so konvergiert ihr Cauchy-Produkt gegen  $AB$ .

## 5. Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit

### 5.0.1 $n$ -dimensionale Funktionen:

Eine Funktion mit  $n$  reellwertigen Veränderlichen erzeugt einen Graphen der Dimension  $n+1$ .

### 5.0.2 Darstellung einer $n$ -dimensionalen Funktion:

$$f : z \mapsto f(z) \quad z \in A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$G_f = \{f(z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z = (x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))\}$$

## 5.1 Grenzwerte

### 5.1.1 Übertragungsprinzip für Grenzwerte von Funktionen:

Der Limes einer Funktion  $f(\underline{x})$  an der Stelle  $\underline{x}_0$  lautet analog zum Grenzwert von Folgen und Reihen:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{a}$$

$$\Leftrightarrow \text{für ein } \epsilon > 0 \text{ existiert ein } \delta(\epsilon, \underline{x}_0), \text{ für das gilt :}$$

$$\|f(\underline{x}) - \underline{a}\| \leq \epsilon \quad \text{falls} \quad \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \leq \delta(\epsilon, \underline{x}_0)$$

### 5.1.2 Linksseitiger Grenzwert, rechtsseitiger Grenzwert:

Man unterscheidet die Grenzwerte, die ermittelt werden, wenn man sich von links oder von rechts an die Stelle  $\underline{x}_0$  nähert, denn bei vielen Funktionen sind sie an bestimmten Stellen unterschiedlich.

### 5.1.3 Uneigentlicher Grenzwert:

Als uneigentlichen Grenzwert bezeichnet man den Grenzwert  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \pm\infty$ .

### 5.1.4 Stetigkeit von Funktionen:

Eine Funktion heißt stetig in  $\underline{x}_0$ , wenn ihr rechts- und linksseitiger Grenzwert (und gegebenenfalls der Funktionswert) bei  $\underline{x}_0$  gleich sind.

## 5.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

### 5.2.1 Extremwertsatz von Weierstraß:

Gilt für ein gegebenes Intervall  $[a, b]$  für ein  $x$  aus diesem Intervall

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

$$f(x_2) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

$$f(x_1) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

so, heißt  $x_1$  **Minimum von  $f$  auf  $[a, b]$**  und  $x_2$  **Maximum von  $f$  auf  $[a, b]$** .

### 5.2.2 Monotonie stetiger Funktionen:

Die Monotoniebegriffe werden ebenso definiert wie für Folgen und Reihen.

## 6. Differentialrechnung

### 6.0.1 Tangente:

Die Tangente einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x$  ist eine Gerade, die die Funktion  $f$  an der Stelle  $x$  berührt bzw. unter dem Winkel  $\alpha = 0$  schneidet.

### 6.0.2 Limes des Differenzenquotienten, Ableitung der Funktion $f$ an der Stelle $x$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = Df(x_0)$$

### 6.0.3 Differenzierbarkeit:

Die Differenzierbarkeit kann eingeschränkt sein (s. Stetigkeit). Man unterscheidet deshalb linksseitige und rechtsseitige Differenzierbarkeit.

## 6.1 Ableitungsregeln

### 6.1.1 Faktorsatz:

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

### 6.1.2 Summenregel:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

### 6.1.3 Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

### 6.1.4 Quotientenregel:

$$\left( \frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

### 6.1.5 Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Ist die Ableitung an der Stelle  $x$  positiv, so ist die Funktion dort monoton steigend, ist die Ableitung negativ, so ist sie dort monoton fallend. Ist sie null, so liegt ein **Extrempunkt oder Terrassenpunkt** vor.

## 6.2 Ableitungen von reellwertigen Funktionen mehrerer Veränderlicher und von vektorwertigen Funktionen

### 6.2.1 Vektorwertige Funktionen und deren Ableitung:

$$\text{Funktion } \underline{f} : D \mapsto \mathbb{R}^m : \underline{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{Ableitung } \underline{f}'(x) \text{ von } \underline{f}(x) : \underline{f}'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}$$

$\underline{f}'(x)$  ist der Richtungsvektor der Tangente an die Kurve  $\underline{f}$  im Punkt  $(x, \underline{f}(x))$ .













































































































































































